Apelidos: Nome:

Exame de MECÁNICA CLÁSICA I (21 de decembro de 2022)

1. Unha partícula de masa m móvese nun plano coa seguinte enerxía potencial que depende só da coordenada polar r:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{1}$$

onde $k > 0$ e L son constantes.

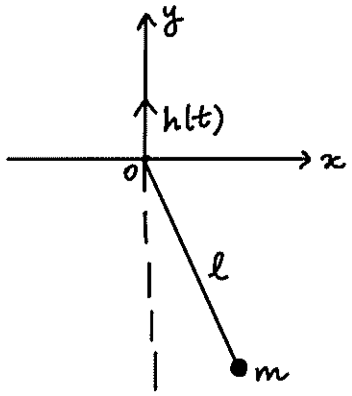
a) Representa gráficamente $V(r)$

b) Discute cualitativamente o movemento da masa basándose na enerxía potencial para os posibles valores de L. Calcula a enerxía mínima necesaria para que a partícula chegue a infinito.

c) Calcula o radio das órbitas circulares no caso de existir.

d) Calcula a frecuencia ω_r das pequenas oscilacións radiais ó redor da órbita circular. Comproba que o resultado é dimensionalmente correcto.

2. O extremo dun péndulo simple (masa m, lonxitude l, movemento no plano x-y) móvese na dirección vertical seguindo a ecuación y=h(t) (ver figura).



a) Escribe a Lagranxiana e identifica simetrías e cantidades conservadas.

b) Determina a ecuación diferencial do movemento. A que sistema físico corresponde?

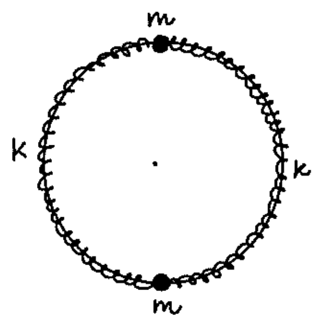
c) Acha a frecuencia de pequenas oscilacións. Discute os casos no que a aceleración $\ddot{h}(t) = \pm g$.

d) No caso $h(t) = a\cos(\omega t)$ (péndulo de Kapitza) o movemento $\theta(t)$ (ángulo do péndulo) pode estudarse utilizando a seguinte enerxía potencial efectiva:

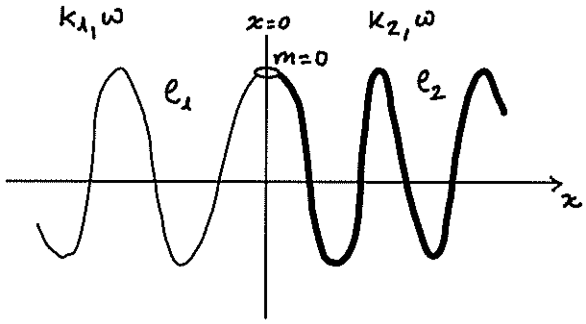
$$V(\theta) = -mgl\cos\theta + m\left(\frac{a\omega}{2}\sin\theta\right)^2 \tag{2}$$

Determina os puntos de equilibrio do sistema en función da frecuencia ω.

3. Dúas partículas de masa m ensartadas nun arame circular están unidas por resortes de constante k como se amosa na figura. Calcula as frecuencias propias e os modos normais de oscilación do sistema.



4. Considera a reflexión e transmisión de ondas harmónicas $\psi(x,t)$ en dúas cordas vibrantes de distinta densidade ρ_1 e ρ_2 unidas por un anel sen masa no ponto $x=0$ tal e como se indica na figura. Nas dúas cordas propáganse ondas de frecuencia ω e número de onda k_1 e k_2 respectivamente. A tensión T das dúas cordas é constante en cada unha delas, pero diferente T_1 e T_2.



a) Xustifica as seguintes condicións de contorno en $x=0$ (fai un debuxo):

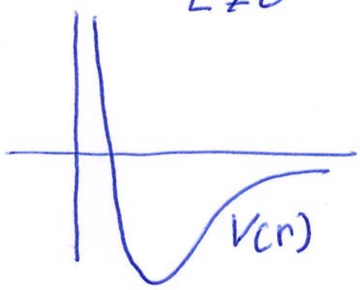
$$\psi_1(x=0,t) = \psi_2(x=0,t) \quad ; \quad T_1 \left.\frac{\partial \psi_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = T_2 \left.\frac{\partial \psi_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \quad (3)$$

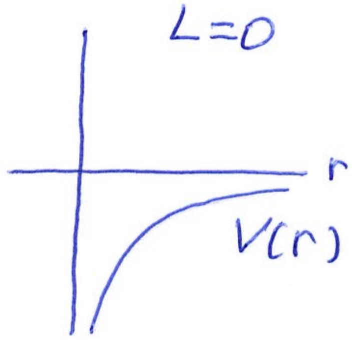
b) Calcula a relación r entre a amplitude da onda reflectida e incidente, Hai cambio de fase na reflexión? En qué condicións non hai onda reflectida?

c) Obtén a relación t entre a amplitude da onda transmitida e incidente. Hai cambio de fase na transmisión? En qué condicións non hai onda transmitida?

(1)

a) $L \neq 0$ $\qquad\qquad$ $L = 0$





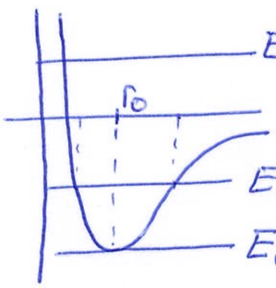
$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$V'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{L^2}{km}$$

$$V''(r_0) = \frac{k^4 m^3}{L^6} > 0 \quad \Rightarrow \text{mínimo en } r_0 .$$

b)

$L \neq 0$



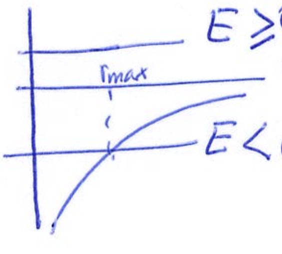
$E_2 \geq 0 \Rightarrow r$ entre r_{min} e ∞

$\rightarrow$ por exemplo unha elipse.

$E_1 < 0 \Rightarrow r$ entre r_{min} e r_{max}

$E_0 = V(r_0) \Rightarrow r = r_0$ órbita circular.

$L = 0$



$E \geq 0 \Rightarrow r$ entre 0 e ∞

$E < 0 \Rightarrow r$ entre 0 e r_{max}.

E min necesaria para chegar a $\infty \Rightarrow \underline{\underline{E = 0}}$.

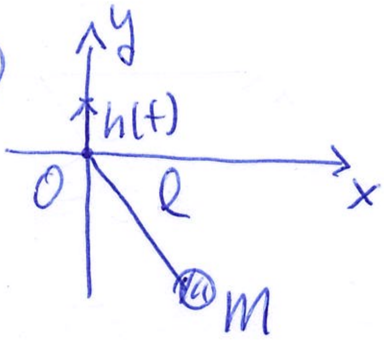
c) $r_0 = \dfrac{L^2}{km}$ radio da órbita circular.

d) Frecuencia de pequenas oscilacións:

$$V(r) = V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2} V''(r_0)(r - r_0)^2 + \dots$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''(r_0)}{m}} = \frac{k^2 m}{L^3} \quad ; \quad [\omega_r] = s^{-1}$$

(2)



$x = l \operatorname{sen}\theta$

$y = -l\cos\theta + h(t)$

$x^2 + (y - h(t))^2 = l^2$ ligadura

1 grao de liberdade

Coord. θ.

a) $$T = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2 + 2l \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta}\, \dot{h} \right)$$

$$V = mg\left(-l\cos\theta + h(t)\right)$$

$$L = T - V \quad , \quad L = L(\theta, \dot{\theta}, t) \Rightarrow$$

$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \rightarrow H$ non se conserva ; $\frac{\partial L}{\partial \theta} \neq 0$ P_θ non se conserva

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g + \ddot{h}}{l} \operatorname{sen}\theta$$ péndulo simple

c) Pequenas oscilacións $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g + \ddot{h}}{l}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g + \ddot{h}}{l}}$$

$\ddot{h} = -g \Rightarrow \omega = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$ $(\dot{\theta} = cte) \Rightarrow \theta = \theta(0) + \dot{\theta}(0)\, t$

sería un péndulo en caída libre que xira ao redor de O.

$\ddot{h} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ péndulo sometido ao dobre de gravidade.

d) Péndulo de Kapitza $h(t) = a\cos(\omega t)$

$$V = -mgl\cos\theta + m\left(\frac{a\omega}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$V'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0,\ \pi,\ \arccos\left(-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right);\ \omega_c = \sqrt{\frac{2gl}{a^2}}$$

$\theta = 0$ $V''(0) > 0 \Rightarrow$ mínimo en $\theta = 0$ (equilibrio estabel)

$\theta = \pi$ $V''(\pi) = \frac{1}{2} m a^2 (\omega^2 - \omega_c^2)$

$\omega > \omega_c \Rightarrow V''(\pi) > 0$ mínimo en $\theta = \pi$ (eq. estabel)

$\omega < \omega_c \Rightarrow V''(\pi) < 0$ máximo en $\theta = \pi$ (eq. inestabel)

$\cos\theta = -\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ Eiquí só temos o caso $\omega \geq \omega_c$

$\omega > \omega_c \Rightarrow V'' < 0$ máximo, eq. inestabel

(xa que $V'' = mgl \frac{\omega_c^4 - \omega^4}{\omega^2 \omega_c^2}$)

En resumo:

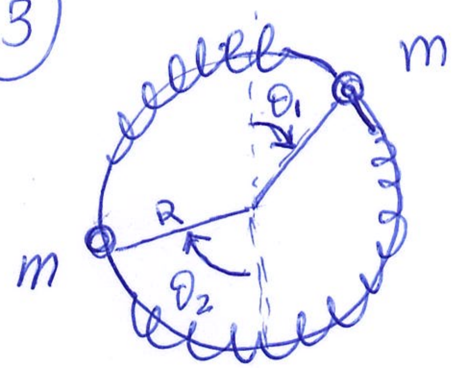
se $\omega < \omega_c$ $\theta = 0$ estabel, $\theta = \pi$ inestabel

se $\omega > \omega_c$ $\theta = 0, \pi$ son estabeis

$\cos\theta = -\frac{\omega_c^2}{\omega}$ é inestabel

$\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

③



$$q_1 = \theta_1 \quad , \quad q_2 = \theta_2 .$$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k R^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k R^2 (\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\{m\} = R^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \; ; \; \{A\} = R^2 \begin{pmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}$$

frecuencias propias :

$$\det[\{A\} - \omega^2 \{m\}] = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 0$$
$$\omega_2^2 = 4 \frac{k}{m}$$

Vectores propios

$$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = 4 \frac{k}{m} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

Modos normais.

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \eta_1 &= \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \eta_2 &= \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned}$$

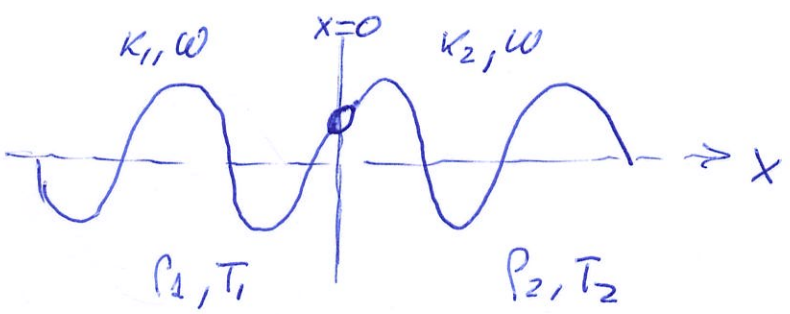
Modo 1 $\quad \omega_1 = 0$
$\eta_1(t) \; ; \; \eta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = a\eta_1$, $\theta_2 = a\eta_1$

$\omega_1 = 0$
Modo simétrico traslacional
$a(t) = \dot{\theta}(0)\, t$

Modo 2 $\quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$
$\eta_1 = 0 \; ; \; \eta_2(t) \Rightarrow \theta_1 = b\eta_2$, $\theta_2 = -b\eta_2$

Modo antisimétrico

(4)



a) $\Psi_1(x=0,t) = \Psi_2(x=0,t)$ continuidade da solución.

$$T_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = T_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$$ continuidade da componente y d forza.

b) e c)

Ondas en (1)

$$\Psi_1 = A e^{i(k_1 x - \omega t)} + B e^{i(-k_1 x - \omega t)}$$

$\longrightarrow$ incidente $\quad$ $\longleftarrow$ reflectida

Onda en (2)

$$\Psi_2 = C e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

$\longrightarrow$ transmitida.

Aplicando as condicións de contorno en $x=0$

$$A + B = C$$

$$T_1 k_1 (A - B) = T_2 k_2 C \quad \xrightarrow[t = C/A]{r = B/A}$$

$$r = \frac{T_1 k_1 - T_2 k_2}{T_1 k_1 + T_2 k_2}$$

- $r > 0$ non hai cambio de fase na reflexión
- $r < 0$ cambio en π
- $r = 0$ no hai reflexión $\rightarrow$ $\underline{T_1 k_1 = T_2 k_2}$

$$t = \frac{2 T_1 k_1}{T_1 k_1 + T_2 k_2}$$ $\rightarrow$ non hai cambio de fase na transmisión. Sempre hai transmisión.